

Вопросы к коллоквиуму
"Функции нескольких переменных".
Математический анализ, 4-й модуль,
группы ПМ-11, 12, 13;
2014/2015 учебный год,
В. В. Лебедев

На коллоквиуме студент получает два вопроса из этого вопросника по выбору преподавателя. Студент должен знать определения и формулировать утверждения. Воспроизводить доказательства не требуется.

1. Что такое расстояние в $\mathbb{R}^n$? Что такое шар в $\mathbb{R}^n$? Дайте определение окрестности и проколотой окрестности точки в $\mathbb{R}^n$ и предела последовательности точек в $\mathbb{R}^n$.
2. Дайте определения ограниченного множества, открытого и замкнутого множества в $\mathbb{R}^n$.
3. Дайте определения границы множества в $\mathbb{R}^n$, связного множества, области.
4. Сформулируйте лемму Больцано–Вейерштрасса в многомерном случае.
5. Расскажите о понятии функции нескольких переменных. Что такое график функции (на примере функции 2-х переменных). Что такое множество уровня. Дайте определение предела функции (включая случай функции, заданной на множестве в $\mathbb{R}^n$). Существует ли

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}?$$

6. Дайте определение непрерывности функции (нескольких переменных) в точке, на множестве, и перечислите основные свойства непрерывных функций.
7. Сформулируйте теорему Коши о промежуточном значении в многомерном случае. Изложите и обоснуйте метод "пробных точек" решения неравенств вида $f(x, y) > 0$. Найдите область определения функции $z = \ln \frac{xy-1}{x^2+y^2-1}$.
8. Сформулируйте теорему Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значении (для функций многих переменных).
9. Дайте определение частных производных. Сформулируйте теорему Шварца о смешанных производных.
10. Дайте определение дифференцируемости функции нескольких переменных. Запишите формулу линеаризации.

11. Сформулируйте утверждение о связи дифференцируемости и непрерывности. Сформулируйте достаточное условие дифференцируемости в терминах частных производных.

12. Дайте определение касательной плоскости к графику функции двух переменных. Сформулируйте утверждение о связи дифференцируемости и существованием касательной плоскости. Запишите уравнение касательной плоскости.

13. Дайте определение градиента. Дайте определение производной по направлению и запишите формулу для ее вычисления.

14. Дайте определение матрицы Якоби. Запишите формулу дифференцирования суперпозиции функций нескольких переменных.

15. Дайте определение матрицы Гессе. Запишите формулу Тэйлора с остаточным членом Лагранжа второго порядка (для функций нескольких переменных).

16. Дайте определение точки локального экстремума функции нескольких переменных. Сформулируйте необходимое условие локального экстремума для дифференцируемых функций.

17. Сформулируйте достаточное условие локального экстремума функции нескольких переменных и его отсутствия в терминах матрицы Гессе.

18. Для функций двух переменных запишите достаточное условие локального экстремума и его отсутствия в терминах вторых производных. Найдите точки локального экстремума функции $z = x^3 - y^2 + x^2y$ и укажите к какому типу они относятся.

19. Что такое неявная функция? Как дифференцировать неявную функцию? Запишите формулу Тэйлора–Пеано второго порядка при $x \rightarrow 0$ для функции $y = y(x)$, заданной неявно соотношением

$$xy^3 + y^2 - 1 = 0, \quad y(0) = 1.$$